1. Flujo eléctrico a través de un cubo

DATOS

Campo uniforme: $\vec{E} = E_0\,\vec{\imath}$. El cubo tiene lado a.

IDEA

El flujo por una cara plana es $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = E\,S\cos\theta$. El vector superficie $\vec{S}$ apunta hacia fuera.

CÁLCULO CARA A CARA

• Cara 1: su normal exterior apunta en +x, así que $\theta = 0°$.

$\Phi_1 = E_0\,a^2\cos 0° = +E_0a^2$.

• Cara 3: su normal exterior apunta en −x, así que $\theta = 180°$.

$\Phi_3 = E_0\,a^2\cos 180° = -E_0a^2$.

• Caras 2, 4, 5 y 6: sus normales son perpendiculares al campo ($\theta = 90°$).

$\Phi_2 = \Phi_4 = \Phi_5 = \Phi_6 = E_0a^2\cos 90° = 0$.

CARGA ENCERRADA

Por la ley de Gauss: $\Phi\text{total} = Q\text{enc}/\varepsilon_0$.

$\Phi\text{total} = (+E_0a^2) + (-E_0a^2) + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

Por tanto, $Q\text{enc} = \varepsilon_0 \cdot 0 = 0$ C.

RESULTADO

$\Phi_1 = +E_0a^2$; $\Phi_3 = -E_0a^2$; las otras cuatro caras tienen flujo cero; $Q\text{enc} = 0$.

2. Carga encerrada en una superficie

DATOS

$\vec{E} = (4 + 3y^2)\,\vec{\jmath}$ (SI)

$a = 0{,}5$ m; $b = 0{,}4$ m; $c = 0{,}3$ m; $y_0 = 0{,}2$ m.

IDEA

El campo solo tiene componente en el eje y. Por eso, únicamente contribuyen al flujo las dos caras perpendiculares al eje y. Las demás tienen $\vec{E} \cdot \vec{S} = 0$.

ÁREAS Y COORDENADAS

Cada cara perpendicular a y tiene área $S = a \cdot c = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$ m².

Las caras están en $y = y_0$ y en $y = y_0 + b = 0{,}6$ m.

FLUJO NETO

En la cara de $y = 0{,}6$ m, la normal exterior es $+\vec{\jmath}$:

$\Phi_{superior} = E(0{,}6)S = [4 + 3(0{,}6)^2] \cdot 0{,}15$.

En la cara de $y = 0{,}2$ m, la normal exterior es $-\vec{\jmath}$:

$\Phi_{inferior} = -E(0{,}2)S = -[4 + 3(0{,}2)^2] \cdot 0{,}15$.

Al sumar, el término constante 4 se cancela:

$\Phi_{total} = 3[(0{,}6)^2 - (0{,}2)^2] \cdot 0{,}15$

$= 3(0{,}36 - 0{,}04) \cdot 0{,}15 = 0{,}144$ N·m²/C.

LEY DE GAUSS

$Q_{enc} = \varepsilon_0 \, \Phi_{total} = (8{,}85 \cdot 10^{-12}) \cdot 0{,}144$

$= 1{,}274 \cdot 10^{-12}$ C.

RESULTADO

$Q_{enc} \approx 1{,}27 \cdot 10^{-12}$ C = 1,27 pC.

3. Fuerza y energía potencial junto a un plano cargado

DATOS

Plano infinito en $x = -3$ m; $\sigma = 3$ C/m^2.
Partícula: $q = 1$ nC $= 10^{-9}$ C, situada en el origen.
$V = 0$ en $x = 1$ m; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$.

CAMPO DEL PLANO

El campo de un plano infinito tiene módulo $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$.
Como el punto está a la derecha de un plano positivo, el campo apunta hacia $+x$:
$\vec{E} = [3/(2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12})]\,\vec{\imath} \approx 1{,}695 \cdot 10^{11}\,\vec{\imath}$ N/C.

a) FUERZA ELÉCTRICA

$\vec{F} = q\vec{E} = 10^{-9} \cdot 1{,}695 \cdot 10^{11}\,\vec{\imath}$
$\approx 169{,}5\,\vec{\imath}$ N $\approx 54\pi\,\vec{\imath}$ N.

b) ENERGÍA POTENCIAL

Para un campo uniforme, $V(0) - V(1) = E(1-0) = E \cdot 1$ m.
Como $V(1) = 0$, $V(0) = E \cdot 1$ m $\approx 1{,}695 \cdot 10^{11}$ V.
La energía potencial es $U = qV$:
$U(0) = 10^{-9} \cdot 1{,}695 \cdot 10^{11} \approx 169{,}5$ J $\approx 54\pi$ J.

RESULTADO

$\vec{F} \approx 54\pi\,\vec{\imath}$ N; $U(0) \approx 54\pi$ J.

4. Corteza esférica cargada

DATOS
Radio R = 6 cm = 0,06 m.
Densidad superficial $\sigma = 9\ nC/m^2 = 9\cdot10^{-9}\ C/m^2$.
Puntos: $r_1 = 0{,}02$ m y $r_2 = 0{,}10$ m.

a) CARGA TOTAL
La superficie de una esfera es $4\pi R^2$:
$Q = \sigma\cdot 4\pi R^2$
$= (9\cdot10^{-9})\cdot 4\pi\cdot(0{,}06)^2$
$= 4{,}07\cdot10^{-10}$ C.

b) CAMPO ELÉCTRICO
Por la ley de Gauss, dentro de una corteza esférica uniformemente cargada el campo es cero:
$E(r<R) = 0$.
Como $r_1 = 0{,}02\ m < R = 0{,}06$ m:
$E(r_1) = 0$ N/C.

Fuera de la corteza, el campo es como el de una carga puntual Q en el centro:
$E(r) = kQ/r^2$, con $k \approx 8{,}99\cdot10^9\ N\cdot m^2/C^2$.
$E(r_2) = (8{,}99\cdot10^9)(4{,}07\cdot10^{-10})/(0{,}10)^2$
$\approx 366{,}5$ N/C.

RESULTADO
$Q \approx 4{,}1\cdot10^{-10}$ C; E(2 cm) = 0; E(10 cm) ≈ 366,5 N/C.

5. Dos placas planas con cargas opuestas

DATOS

Placa en $x = 0$ con densidad $+\sigma$; placa en $x = d$ con densidad $-\sigma$.
Se consideran infinitas y la placa negativa está conectada a tierra, por lo que $V(d) = 0$.

a) CAMPO ELÉCTRICO

Una sola lámina infinita produce un campo de módulo $\sigma/(2\varepsilon_0)$, perpendicular a la lámina.

- Fuera de las placas, los campos de ambas láminas tienen sentidos opuestos y se cancelan.
- Entre las placas, los campos tienen el mismo sentido, desde $+\sigma$ hacia $-\sigma$, es decir, $+x$.

Por tanto:
$\vec{E} = 0$ si $x < 0$.
$\vec{E} = (\sigma/\varepsilon_0)\vec{\imath}$ si $0 < x < d$.
$\vec{E} = 0$ si $x > d$.

b) POTENCIAL

Usamos $E_x = -dV/dx$. Entre las placas:
$dV/dx = -\sigma/\varepsilon_0$.
Integramos: $V(x) = -(\sigma/\varepsilon_0)x + \text{constante}$.
Aplicamos $V(d) = 0$:
$0 = -\sigma d/\varepsilon_0 + \text{constante} \Rightarrow \text{constante} = \sigma d/\varepsilon_0$.
Así, $V(x) = (\sigma/\varepsilon_0)(d-x)$, para $0 < x < d$.

Como el campo exterior es cero y $V(d) = 0$, el potencial también es cero fuera de las placas.

RESULTADO

$\vec{E} = (\sigma/\varepsilon_0)\vec{\imath}$ entre placas y cero fuera.
$V(x) = (\sigma/\varepsilon_0)(d-x)$ entre placas; $V = 0$ fuera.

6. Dos esferas conductoras conectadas

DATOS

Carga total $Q = 20\ \mu C = 20\cdot10^{-6}\ C$.

Radios $R_1 = 0{,}04$ m y $R_2 = 0{,}06$ m.

Las esferas están muy alejadas y conectadas por un hilo conductor.

REPARTO DE CARGA

Al conectarlas, sus potenciales son iguales:

$kQ_1/R_1 = kQ_2/R_2 \Rightarrow Q_1/R_1 = Q_2/R_2$.

Además, $Q_1 + Q_2 = Q$.

De estas dos ecuaciones:

$Q_1 = Q\cdot R_1/(R_1+R_2) = 20\ \mu C\cdot 0{,}04/0{,}10 = 8\ \mu C$.

$Q_2 = Q\cdot R_2/(R_1+R_2) = 20\ \mu C\cdot 0{,}06/0{,}10 = 12\ \mu C$.

a) CAMPO EN LA SUPERFICIE

$E = kQ/R^2$.

$E_1 = (8{,}99\cdot10^9)(8\cdot10^{-6})/(0{,}04)^2 \approx 4{,}5\cdot10^7$ N/C.

$E_2 = (8{,}99\cdot10^9)(12\cdot10^{-6})/(0{,}06)^2 \approx 3{,}0\cdot10^7$ N/C.

b) POTENCIAL A DISTANCIA R/2 DEL CENTRO

Como R/2 está dentro del material conductor, el potencial es constante en todo su interior e igual al de la superficie:

$V_1 = kQ_1/R_1 \approx 1{,}80\cdot10^6$ V.

$V_2 = kQ_2/R_2 \approx 1{,}80\cdot10^6$ V.

Los potenciales coinciden, tal como exige la conexión.

RESULTADO

$E_1 \approx 4{,}5\cdot10^7$ N/C; $E_2 \approx 3{,}0\cdot10^7$ N/C.

$V_1 = V_2 \approx 1{,}8\cdot10^6$ V.

7. Plano cargado junto a una capa metálica

DATOS

Plano infinito en $x = 0$ con $\sigma = 8{,}85\ \text{pC/m}^2 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{C/m}^2$.
Capa conductora neutra entre $x = 3$ m y $x = 4$ m.
Tomamos $V(0) = 0$ y $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$.

CAMPO ELÉCTRICO

El campo de un plano infinito tiene módulo $\sigma/(2\varepsilon_0) = 0{,}5$ V/m.
La capa conductora induce cargas en sus superficies y el campo en el metal debe ser cero.
Por tanto:

- $x < 0$: $\vec{E} = -0{,}5\,\vec{\imath}$ V/m.
- $0 < x < 3$: $\vec{E} = +0{,}5\,\vec{\imath}$ V/m.
- $3 < x < 4$: $\vec{E} = 0$.
- $x > 4$: $\vec{E} = +0{,}5\,\vec{\imath}$ V/m.

b) DIFERENCIA DE POTENCIAL

Entre $x = 3{,}5$ m y $x = 4{,}5$ m:
$V(4{,}5) - V(3{,}5) = -\int_{3{,}5}^{4{,}5} E_x\,dx$.
De 3,5 a 4 m, $E = 0$; de 4 a 4,5 m, $E = 0{,}5$ V/m.
$\Delta V = -(0 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5) = -0{,}25$ V.

c) POTENCIAL DENTRO DEL METAL

Entre 0 y 3 m, $E_x = 0{,}5$ V/m:
$V(3) - V(0) = -\int_0^3 0{,}5\,dx = -1{,}5$ V.
Como $V(0) = 0$, $V(3) = -1{,}5$ V.
Dentro del conductor el potencial es constante, así que $V = -1{,}5$ V para $3 \le x \le 4$.

RESULTADO

Campo por regiones como arriba; $V_{4.5} - V_{3.5} = -0{,}25$ V; potencial del metal $= -1{,}5$ V.

8. Carga y potencial de dos esferas conductoras

DATOS

Esfera grande: $R_1 = 0{,}10$ m. Potencial inicial requerido: 500 V.
Esfera pequeña: $R_2 = 0{,}05$ m, inicialmente descargada.
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) \approx 8{,}99 \cdot 10^9$.

a) CARGA PARA ALCANZAR 500 V

Para una esfera conductora aislada: $V = kQ/R$.
$Q = VR/k = 4\pi\varepsilon_0 RV$
$= 4\pi(8{,}85 \cdot 10^{-12})(0{,}10)(500)$
$\approx 5{,}56 \cdot 10^{-9}$ C.

b) CONECTADAS MEDIANTE UN HILO

Los potenciales se igualan: $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$.
Y se conserva la carga: $Q_1 + Q_2 = 5{,}56$ nC.
Entonces:
$Q_1 = Q \cdot R_1/(R_1+R_2) \approx 3{,}70$ nC.
$Q_2 = Q \cdot R_2/(R_1+R_2) \approx 1{,}85$ nC.
Potencial común:
$V = kQ/(R_1+R_2) \approx 333$ V.

c) SEPARADAS Y CONCÉNTRICAS

Ahora están aisladas entre sí, con la pequeña dentro de la grande.
La esfera exterior tiene potencial:
$V_1 = k(Q_1+Q_2)/R_1 = kQ/R_1 = 500$ V.
La esfera interior tiene su propio potencial más la contribución constante de la carga exterior:
$V_2 = kQ_2/R_2 + kQ_1/R_1$.
Como $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$, cada término aporta aproximadamente 333 V:
$V_2 \approx 666$ V.

RESULTADO

Q inicial ≈ 5,6 nC; $Q_1 \approx 3{,}7$ nC; $Q_2 \approx 1{,}86$ nC.
Conectadas: V ≈ 333 V. Concéntricas aisladas: V exterior = 500 V y V interior ≈ 666 V.

9. Dos superficies esféricas conductoras concéntricas

DATOS

$R_1 = 0{,}10$ m; $R_2 = 0{,}20$ m.
Carga inicial de la superficie exterior: $Q_2 = 10^{-10}$ C.
Diferencia de potencial inicial: $V_1 - V_2 = 10\,000$ V.

a) CARGA DE LA SUPERFICIE INTERIOR

El potencial en la superficie interior es la suma de las contribuciones de ambas capas:
$V_1 = kQ_1/R_1 + kQ_2/R_2$.
En la exterior:
$V_2 = k(Q_1+Q_2)/R_2$.
Al restar, la contribución de Q_2 se cancela:
$V_1 - V_2 = kQ_1(1/R_1 - 1/R_2)$.
Despejamos:
$Q_1 = (V_1-V_2)/[k(1/R_1-1/R_2)]$.
$Q_1 = 10\,000/[8{,}99\cdot10^9(10-5)]$
$\approx 2{,}22\cdot10^{-7}$ C.

b) SE CONECTA A TIERRA LA SUPERFICIE INTERIOR

Al conectarla a tierra, su potencial pasa a cero. La carga de la esfera interior se redistribuye; llamémosla Q_1':
$0 = kQ_1'/R_1 + kQ_2/R_2$.
$Q_1' = -Q_2R_1/R_2 = -(10^{-10})(0{,}10/0{,}20) = -5\cdot10^{-11}$ C.

El potencial exterior queda:
$V_2' = k(Q_1'+Q_2)/R_2$
$= (8{,}99\cdot10^9)(5\cdot10^{-11})/0{,}20$
$\approx 2{,}25$ V.

RESULTADO

Carga interior inicial $Q_1 \approx 2{,}22\cdot10^{-7}$ C.
Tras conectar la interior a tierra, el potencial de la exterior es $\approx 2{,}25$ V.

10. Condensador esférico con dieléctrico

DATOS

Radio interior a = 10 mm = 0,010 m.
Radio exterior b = 12 mm = 0,012 m.
Permitividad relativa $\varepsilon_r = 3{,}1$.
Carga de magnitud Q = 10 pC = 10^{-11} C.
La armadura exterior se conecta al borne negativo, por lo que $V_a - V_\beta > 0$.
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ F/m.

a) CAPACIDAD

Para un condensador esférico con dieléctrico:
$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, ab/(b-a)$.
Sustituimos:
$C = 4\pi(8{,}85\cdot10^{-12})(3{,}1)(0{,}010)(0{,}012)/(0{,}002)$
$\approx 2{,}066\cdot10^{-11}$ F = 20,66 pF.

b) DIFERENCIA DE POTENCIAL

$C = Q/(V_a - V_\beta)$, así que:
$V_a - V_\beta = Q/C = (10\cdot10^{-12})/(20{,}66\cdot10^{-12})$
$\approx 0{,}484$ V $\approx 0{,}48$ V.

c) ENERGÍA ALMACENADA

$U = Q^2/(2C)$:
$U = (10\cdot10^{-12})^2/[2(20{,}66\cdot10^{-12})]$
$\approx 2{,}42\cdot10^{-12}$ J = 2,42 pJ.

RESULTADO

$V_a - V_\beta \approx 0{,}48$ V; C ≈ 20,66 pF; U ≈ 2,4 pJ.