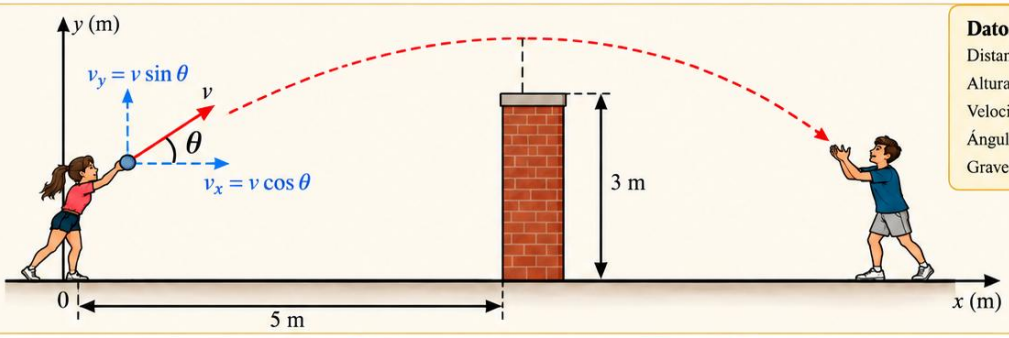
Problema: Sara está jugando con su vecino a pasar una pelota por encima del muro que los separa. Dicho muro se encuentra a una distancia de 5 m y tiene una altura de 3 m. Lanza la pelota con una velocidad v y un ángulo de θ.

a) Hay un ángulo crítico, a partir del cual nunca se podrá sobrepasar el muro, por muy rápido que vaya la pelota. ¿Cuál es ese ángulo?

b) Si el ángulo de lanzamiento es 43° ¿Cuál es la velocidad mínima con la que debe lanzar la bola para sobrepasar el muro?



Datos:
Distancia al muro: 5 m
Altura del muro: 3 m
Velocidad inicial: v
Ángulo de lanzamiento: θ
Gravedad: $g = 9{,}8$ m/s^2

1. Ecuaciones del movimiento

- **Componentes de la velocidad inicial:**

$$v_x = v\cos\theta$$
$$v_y = v\sin\theta$$

- **Movimiento horizontal (MRU):**

$$x = v_x t = v\cos\theta\, t$$

$$t = \frac{x}{v\cos\theta}$$

- **Movimiento vertical (MRUA):**

$$y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = v\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

- **Ecuación de la trayectoria:**

Sustituimos $t = \dfrac{x}{v\cos\theta}$ en la ecuación vertical:

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\theta}$$

a) Ángulo crítico

1 Altura máxima posible en el muro

Si la velocidad v es muy grande ($v \to \infty$), el segundo término tiende a cero:

$$y_{max} = x\tan\theta$$

En $x = 5$ m:

$$y_{max} = 5\tan\theta$$

2 Condición para superar el muro

Para poder sobrepasar el muro de 3 m:

$$y_{max} \geq 3 \quad \rightarrow \quad 5\tan\theta \geq 3$$

3 Ángulo crítico

El ángulo crítico es cuando la igualdad se cumple:

$$5\tan\theta_c = 3$$
$$\tan\theta_c = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\theta_c = \arctan(0{,}6) = \mathbf{30{,}96°}$$

Si $\theta < 30{,}96°$ no se podrá superar el muro, aunque la velocidad sea muy grande.

b) Velocidad mínima para $\theta = 43°$

1 Condición de paso justo por el muro

Para la velocidad mínima, la pelota pasa justo a la altura del muro ($y = 3$ m) en $x = 5$ m:

$$3 = 5\tan 43° - \frac{9{,}8(5)^2}{2\,v^2\cos^2 43°}$$

2 Cálculos numéricos

$\tan 43° = 0{,}9325 \rightarrow 5\tan 43° = 4{,}6625$

$\cos 43° = 0{,}7314 \rightarrow \cos^2 43° = 0{,}535$

$9{,}8(5)^2 = 245$

Sustituyendo:

$$3 = 4{,}6625 - \frac{245}{2\,v^2\,(0{,}535)} = 4{,}6625 - \frac{245}{1{,}070\,v^2}$$

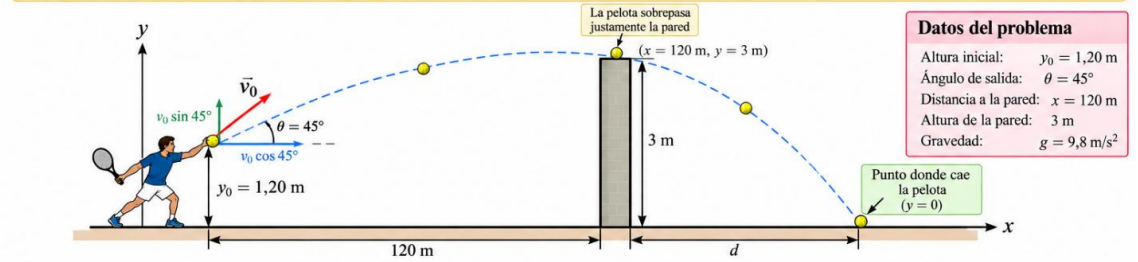
3 Despeje de la velocidad

$$4{,}6625 - 3 = \frac{245}{1{,}070\,v^2} \quad \rightarrow \quad 1{,}6625 = \frac{245}{1{,}070\,v^2}$$
$$v^2 = \frac{245}{1{,}779} = 137{,}72$$
$$v = \sqrt{137{,}72} = 11{,}74 \text{ m/s}$$

$$v_{min} = 11{,}74 \text{ m/s}$$
$$(\approx 42{,}3 \text{ km/h})$$

2.- Una pelota de tenis sobrepasa justamente una pared de 3 m de alto que está a 120 m del tenista. Si la pelota sale formando un ángulo de 45° y con una altura de 1,20 m respecto al suelo:

a) ¿Qué tipo de movimiento presenta la pelota? Escribe sus ecuaciones de movimiento (no es necesario demostrarlas).
b) ¿Cuál es su velocidad inicial?
c) ¿A qué distancia de la pared cae la pelota?



Datos del problema

Altura inicial:	$y_0 = 1{,}20$ m
Ángulo de salida:	$\theta = 45°$
Distancia a la pared:	$x = 120$ m
Altura de la pared:	3 m
Gravedad:	$g = 9{,}8$ m/s^2

a) Tipo de movimiento y ecuaciones

La pelota realiza un movimiento parabólico o tiro oblicuo, que es la combinación de:

- Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) en el eje horizontal (x).
- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) en el eje vertical (y), con aceleración $g = 9{,}8$ m/s^2 hacia abajo.

Ecuaciones del movimiento

$$x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t \qquad \text{(MRU en } x\text{)}$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(MRUA en } y\text{)}$$

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta \qquad \text{(constante)}$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt$$

b) ¿Cuál es su velocidad inicial?

1 **Usamos la condición en la pared**
En $x = 120$ m la pelota tiene una altura de 3 m.
Usamos la ecuación de la trayectoria:

$$y = y_0 + x\tan\theta - \frac{g\,x^2}{2\,v_0^2\cos^2\theta}$$

Sustituimos los datos ($y = 3$, $x = 120$, $y_0 = 1{,}20$, $\theta = 45°$):

$$3 = 1{,}20 + 120\tan 45° - \frac{9{,}8\cdot 120^2}{2\,v_0^2\cos^2 45°}$$

2 **Calculamos las razones trigonométricas**

$$\tan 45° = 1 \qquad \cos^2 45° = \frac{1}{2}$$

3 **Sustituimos y despejamos v_0^2**

$$3 = 1{,}20 + 120 - \frac{9{,}8\cdot 14400}{v_0^2} \rightarrow v_0^2 = \frac{141120}{118{,}20} = 1193{,}91$$

4 **Velocidad inicial**

$$v_0 = \sqrt{1193{,}91} = \mathbf{34{,}6\ m/s}$$

c) ¿A qué distancia de la pared cae la pelota?

1 **La pelota cae cuando $y = 0$**
Usamos la ecuación de la trayectoria:

$$0 = 1{,}20 + x\tan 45° - \frac{9{,}8\,x^2}{2\,v_0^2\cos^2 45°}$$

Sustituimos valores ($v_0^2 = 1193{,}91$):

$$0 = 1{,}20 + x - \frac{9{,}8\,x^2}{1193{,}91}$$

2 **Ecuación de segundo grado**
La escribimos en forma $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\frac{9{,}8}{1193{,}91}x^2 - x - 1{,}20 = 0$$

3 **Resolviendo**
Aplicamos la fórmula cuadrática y obtenemos:

$x_1 = 121{,}2$ m $\qquad x_2 = -11{,}9$ m (no válida)

4 **Distancia desde la pared**
La pared está en $x = 120$ m, por lo que:

$$d = 121{,}2 - 120 = \mathbf{1{,}2\ m}$$