1.- Una partícula se mueve con una velocidad descrita por $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha t + \delta}} + \beta$ se pide:

a) Calcular la aceleración de dicha partícula en función del tiempo.
b) Calcular la posición de dicha partícula en función del tiempo.
c) ¿Cuáles son las dimensiones y las unidades de las constantes α, β y δ?

a) Aceleración en función del tiempo

La aceleración es la derivada de la velocidad:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Partimos de:

$$v(t) = (\alpha t + \delta)^{-1/2} + \beta$$

Derivamos término a término:

- Derivada del primer término (regla de la cadena):

$$\frac{d}{dt}(\alpha t + \delta)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(\alpha t + \delta)^{-3/2}\frac{d}{dt}(\alpha t + \delta)$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha t + \delta)^{-3/2}\alpha = -\frac{\alpha}{2(\alpha t + \delta)^{3/2}}$$

- Derivada del segundo término:

$$\frac{d\beta}{dt} = 0 \quad (\beta \text{ es constante})$$

Por tanto, la aceleración es:

$$a(t) = -\frac{\alpha}{2(\alpha t + \delta)^{3/2}}$$

b) Posición en función del tiempo

La posición se obtiene integrando la velocidad: $x(t) = \int v(t)dt$

Partimos de:

$$x(t) = \int \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha t + \delta}} + \beta\right] dt = \int (\alpha t + \delta)^{-1/2}\, dt + \int \beta\, dt$$

1 Integral del primer término

Hacemos el cambio de variable: $u = \alpha t + \delta \Rightarrow du = \alpha\, dt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{\alpha}$

Entonces:

$$\int (\alpha t + \delta)^{-1/2} dt = \int u^{-1/2}\frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int u^{-1/2} du = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) = \frac{2}{\alpha}u^{1/2}$$

Volviendo a la variable t: $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha t + \delta}} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha t + \delta}$

2 Integral del segundo término

$\displaystyle\int \beta\, dt = \beta t$ (β constante)

Por tanto, la posición es: $\displaystyle x(t) = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha t + \delta} + \beta t + C$

Si se conoce una posición inicial $x(0) = x_0$, la constante C se puede determinar:

$$x_0 = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\delta} + C \Rightarrow C = x_0 - \frac{2}{\alpha}\sqrt{\delta}$$

y la posición queda:

$$x(t) = x_0 + \frac{2}{\alpha}\left(\sqrt{\alpha t + \delta} - \sqrt{\delta}\right) + \beta t$$

c) Dimensiones y unidades de α, β y δ

La velocidad tiene dimensiones:

$$[v] = LT^{-1} \quad \text{(m/s)}$$

De la expresión: $v(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha t + \delta}} + \beta$

- El término $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha t + \delta}}$ debe tener dimensiones de velocidad.
- Dentro de la raíz, αt y δ deben tener las mismas dimensiones.

1. Dimensiones de $\alpha t + \delta$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha t + \delta}}\right] = LT^{-1} \Rightarrow \left[\sqrt{\alpha t + \delta}\right] = L^{-1}T$$

$$\Rightarrow [\alpha t + \delta] = L^{-2}T^2$$

Por tanto, αt y δ tienen dimensiones $L^{-2}T^2$.

2. Dimensiones de α

$$[\alpha t] = L^{-2}T^2 \Rightarrow [\alpha]\cdot T = L^{-2}T^2 \Rightarrow [\alpha] = TL^{-2}$$

3. Dimensiones de δ

$$[\delta] = L^{-2}T^2$$

4. Dimensiones de β

β se suma a una velocidad, luego

$$[\beta] = LT^{-1}$$

Constante	Dimensión	Unidad SI
α	TL^{-2}	s/m^2
β	LT^{-1}	m/s
δ	T^2L^{-2}	s^2/m^2

Ejercicio 1. Se tiene una partícula moviéndose con una velocidad dada por $v(t) = \sqrt{\alpha t + \gamma} - kt^2$ se pide:

a) Aceleración de la partícula

La aceleración es la derivada de la velocidad:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Partimos de:

$$v(t) = (\alpha t + \gamma)^{1/2} - kt^2$$

Derivamos término a término:

- $\dfrac{d}{dt}(\alpha t + \gamma)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(\alpha t + \gamma)^{-1/2}\cdot\alpha = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{\alpha t + \gamma}}$
- $\dfrac{d}{dt}(-kt^2) = -2kt$

Por tanto, la aceleración es:

$$a(t) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha t + \gamma}} - 2kt$$

b) Posición de la partícula

La posición se obtiene integrando la velocidad:

$$x(t) = \int v(t)\, dt = \int (\sqrt{\alpha t + \gamma} - kt^2)\, dt$$

Separamos las integrales:

$$x(t) = \int \sqrt{\alpha t + \gamma}\, dt - k\int t^2\, dt$$

- **Primera integral:**

Hacemos $u = \alpha t + \gamma \Rightarrow du = \alpha dt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{\alpha}$

$$\int \sqrt{\alpha t + \gamma}\, dt = \frac{1}{\alpha}\int u^{1/2}\, du = \frac{1}{\alpha}\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3\alpha}(\alpha t + \gamma)^{3/2}$$

- **Segunda integral:** $\displaystyle -k\int t^2\, dt = -k\frac{t^3}{3}$

Por tanto, la posición es:

$$x(t) = \frac{2}{3\alpha}(\alpha t + \gamma)^{3/2} - \frac{k}{3}t^3 + C$$

Si se conoce la posición inicial $x(0) = x_0$:

$$x(t) = x_0 + \frac{2}{3\alpha}\left[(\alpha t + \gamma)^{3/2} - \gamma^{3/2}\right] - \frac{k}{3}t^3$$

c) Unidades de las constantes α, γ y k

La velocidad tiene unidades $[v] = \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, por lo que $[v^2] = \text{m}^2/\text{s}^2$.

En la expresión $v = \sqrt{\alpha t + \gamma} - kt^2$:

- **Constante γ:**

$\alpha t + \gamma$ está dentro de una raíz que debe tener unidades de m^2/s^2, por tanto:

$$[\gamma] = \text{m}^2/\text{s}^2$$

- **Constante α:**

$$[\alpha t] = \text{m}^2/\text{s}^2 \Rightarrow [\alpha] = \frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{\text{s}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$$

$$[\alpha] = \text{m}^2/\text{s}^3$$

- **Constante k:**

El término kt^2 debe tener unidades de m/s:

$$[k]\,\text{s}^2 = \text{m/s} \Rightarrow [k] = \text{m/s}^3$$

$$[k] = \text{m/s}^3$$